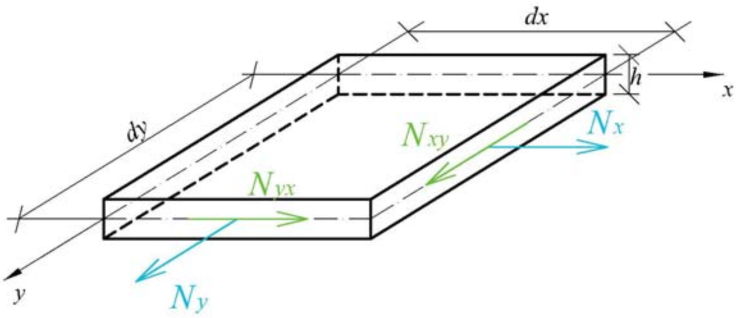
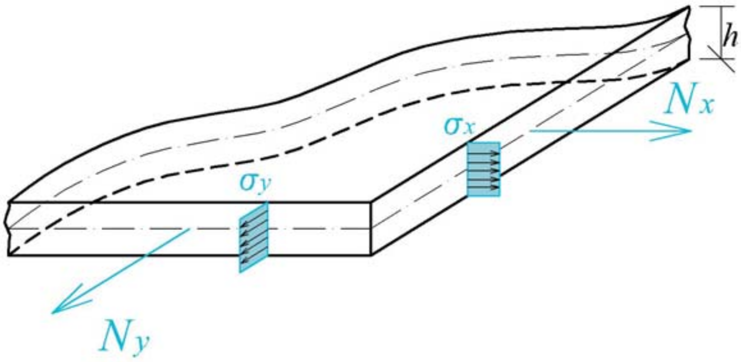
Плоче напрегнуте у својој равни

Површинско и запреминско оптерећење равномерно распоређено по дебљини плоче и паралелно са средњом равни изазива напрезање плоче у својој равни.

Пресечне силе по јединици дужине, које се јављају за овај случај оптерећења су:

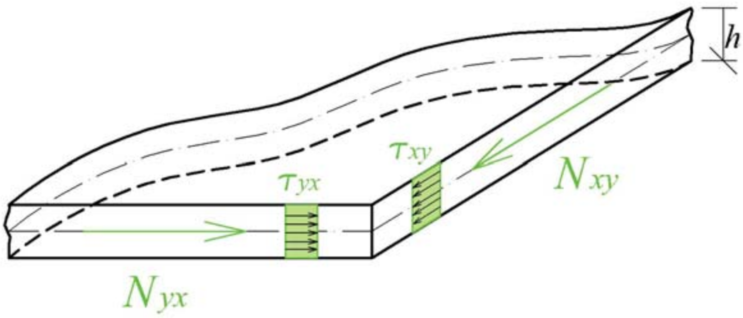




$$\sigma_x = \frac{N_x}{h}$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{h}$$

На основу става о коњугованости смичућих напона $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ следи $N_{xy} = N_{yx}$.



$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{h}$$

Да бисмо могли да решимо проблем напрезања у равни, уводи се *напонска функција* ***F***, која се дефинише на следећи начин:

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Веза између напонске функције ***F*** и сила ***Nx*** и ***Ny*** добија се из услова равнотеже диференцијалног елемента плоче у равни и, када нема запреминског оптерећења, је:

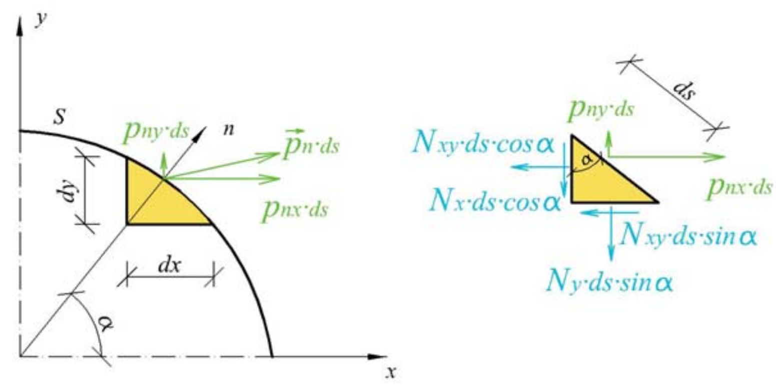
$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Диференцијална једначина равног напрезања за плочу оптерећену силама по контури

$$\boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0}$$

Гранични услови по силама

Посматраћемо услове равнотеже елементарне призме чија је једна страница део контуре, приказане на слици:



$$\sum X = 0:\ N_x \cdot \cos\alpha + N_{xy} \cdot \sin\alpha = p_{nx}$$

$$\sum Y = 0:\ N_{xy} \cdot \cos\alpha + N_y \cdot \sin\alpha = p_{ny}$$

Ако се ова два услова равнотеже напишу преко напонске функције добија се:

$$p_{nx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dx}{ds}, \text{ односно } p_{nx} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$p_{ny} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{ds}, \text{ односно } p_{ny} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

Интеграцијом претходна два израза дуж контуре, почев од неке унапред усвојене тачке ***0*** до произвољне тачке ***s***, могу да се одреде парцијални изводи *напонске функције **F*** на контури по ***x***, односно ***y*** координати:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^s p_{ny}\cdot ds + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\bigg|_0 = -\int_0^s p_{ny}\cdot ds = Q_y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s p_{nx}\cdot ds + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\bigg|_0 = \int_0^s p_{nx}\cdot ds = Q_x$$

За константе $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_0$ и $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_0$ је усвојена вредност нула због једноставности, зато што оне немају утицај на вредности пресечних сила, јер су пресечне силе изражене преко других извода *напонске функције **F***.

Вредност напонске функције на контури се одређује из њеног тоталног диференцијала:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy, \text{ одакле се после сређивања добија:}$$

$$F = \int_0^s (x - x_s)\cdot p_{ny}\cdot ds + \int_0^s (y_s - y)\cdot p_{nx}\cdot ds$$

x_s, y_s – координате посматраног пресека

x, y – текуће координате

Претходни израз представља момент од спољашњег оптерећења на делу контуре од $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{s}$ у односу на тачку $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{F=M}$.

Да бисмо одредили вредност напонске функције F и њених извода $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ на контури посматраћемо линијски носач чија се оса поклапа са контуром површинског носача, оптерећен контурним оптерећењем $\boldsymbol{p_n}$. Линијски носач можемо да пресечемо на произвољном месту и да сматрамо да су силе у том пресеку (не утичу на вредности сила N_x, N_y и N_{xy}) једнаке нули.

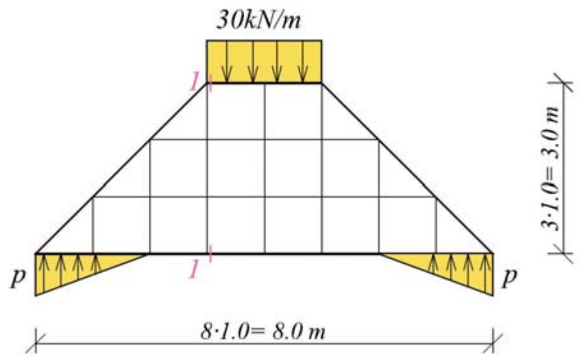
За претходно дефинисан носач, у произвољном пресеку вредност напонске функције F је једнака вредности момента савијања M, а вредности извода напонске функције $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ су једнаки компонентама резултанте оптерећења у посматраном пресеку у $\boldsymbol{y}$ правцу, Q_y , односно $\boldsymbol{x}$ правцу, Q_x, респективно.

Вредности извода $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ нису међусобно независни, па граничне услове по силама на контури задајемо по напонској функцији F и њеном изводу по нормали $\boldsymbol{n}$, $\frac{\partial F}{\partial n}$:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \cos\angle(x,n) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \cos\angle(y,n)$$

<u>Пример 1.</u>

За плочу приказану на слици, применом диференцног поступка, срачунати и нацртати дијаграм силе $\boldsymbol{N_x}$ у пресеку ***1-1***. Добијено решење упоредити са решењем добијеним под претпоставком да је расподела напона по висини плоче линеарна.



<u>Решење</u>